НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМЕНІ С.П. ТИМОШЕНКА

**ЧЕРНОБАЙ Володимир Сергійович**

УДК 539.3

# НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТА ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ З НЕІДЕАЛЬНИМИ ЕЛІПТИЧНИМИ ГРАНИЦЯМИ РОЗДІЛУ ЗА АНТИПЛОСКОГО ЗСУВУ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана у Інституті надтвердих матеріалів імені В.М. Бакуля Національної академії наук України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук
**Кущ Володимир Іванович**
Інститут надтвердих матеріалів імені В.М. Бакуля
НАН України, провідний науковий співробітник.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук
**Жук Ярослав Олександрович**
Київський державний університет ім. Т.Г. Шевченка,
завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки;

доктор фізико-математичних наук
**Селіванов Михайло Федорович**
Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник.

Захист відбудеться «___» _________ 2018 р. о___годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01 Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім.С.П. Тимошенка НАН України за адресою:03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3.

Автореферат розіслано «___» ____________ 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01,
доктор фізико-математичних наук О.П. Жук

# ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Розробка нових структурно-неоднорідних матеріалів є одним з пріоритетних напрямків сучасного науково-технічного прогресу. Утворені поєднанням різнорідних фаз, такі матеріали мають високі фізико-механічні та експлуатаційні характеристики і знаходять дедалі ширше використання у різних галузях техніки. Як правило, створення композитного матеріалу є складною оптимізаційною проблемою. За наявності великої кількості чинників, які впливають на його властивості, вона не може бути розв`язана суто дослідним шляхом і вимагає розвитку теоретичних методів механіки композитів та використання сучасної обчислювальної техніки.

Для структурно-неоднорідних матеріалів властива значна концентрація напружень в фазах та на міжфазних поверхнях, яка є результатом взаємодії включень і визначає структурну чутливість макроскопічних властивостей. Іншим важливим фактором є недосконалість міжфазних границь, яка в реальних композитах зумовлена невідповідністю атомних ґраток, наявністю поверхневого окислення, дифузійних та реакційних міжфазних зон, міжфазних тріщин тощо. Недосконалість міжфазних границь з необхідністю породжує розмірний ефект, тобто залежність властивостей композита від характерного розміру мікроструктури. Це повною мірою стосується наноструктурованих та нанокомпозитних матеріалів, де вплив міжфазних границь є визначальним. Сказане обумовлює актуальність розробки теоретичних моделей і методів для адекватного врахування впливу мікроструктури і міжфазних границь на напружений стан і ефективні пружні властивості структурно-неоднорідних матеріалів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Результати дисертаційної роботи увійшли до звітів по держбюджетним науково-дослідним роботам Інституту надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України "Дослідження та комп'ютерне моделювання закономірностей формування структури, фізико-механічних і експлуатаційних властивостей композиційних алмазовмісних матеріалів (КАМ) для бурових інструментів на основі багатокомпонентних систем при інтенсивному електроспіканні" (0967 ІІІ-114-12, № держреєстрації 0112U000737, 2012-2014рр.); "Дослідження та комп'ютерне моделювання закономірностей впливу властивостей міжфазних границь алмаз-зв'язка на фізико-механічні властивості алмазовмісних композитів за критеріями працездатності та ресурсозберігання у породоруйнуючих інструментах" (0971 ІІІ-6-15, № держреєстрації 0114U007002, 2015-2017рр.) та міжнародного наукового проекту 7-ї Рамкової Програми ЄС IRSES-GA-2013-610547 "Materials containing inhomogeneities of diverse physical properties, shapes and orientations" (TAMER, 2014-2017).

**Метою роботи** є розвиток ефективного методу розв'язання крайових задач теорії пружності для кусково-однорідних тіл з неідеальними еліптичними границями розділу та його застосування до аналізу напруженого стану і пружних властивостей структурно-неоднорідних матеріалів матричного типу.

Досягнення вказаної мети передбачає

- розвиток методу розв`язання крайових задач теорії пружності в багатозв`язних областях з неідеальними еліптичними границями;
- постановку і розв`язання крайових задач пружності для простору з еліптичними в плані включеннями і неідеальним контактом уздовж границі поділу;
- модифікацію методів гомогенізації Максвела і Релея та їх застосування до визначення макроскопічних пружних модулів поздовжнього зсуву кусково-однорідного тіла з еліптичними включеннями і неідеальними границями розділу;
- програмну реалізацію методу, одержання чисельних результатів, аналіз закономірностей впливу умов контакту на границях розділу, а також форми, розміру, взаємного розташування і орієнтації включень на концентрацію напружень та ефективні пружні модулі кусково-однорідного тіла.

**Об'єктом дослідження** є кусково-однорідне лінійно пружне тіло з неідеальними еліптичними границями розділу в умовах антиплоского зсуву.

**Предметом дослідження** є напружено-деформований стан та ефективні пружні модулі поздовжнього зсуву кусково-однорідного тіла з неідеальними еліптичними границями розділу.

**Методи дослідження.** Для побудови аналітичного розв'язку модельних крайових задач використано метод рядів у поєднанні з методом комплексних потенціалів та принципом суперпозиції. Для розв'язання нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовано метод редукції. Для визначення ефективних пружних модулів використано модифіковані методи Максвела і Релея.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає в тому, що:

- розвинуто ефективний аналітичний метод розв`язання крайових задач теорії пружності в багатозв`язних областях з еліптичними границями;
- одержано строгий аналітичний розв'язок задач про антиплоский зсув пружного тіла зі скінченною множиною та періодичною системою еліптичних включень за умови неідеального контакту на границях розділу;
- теоретично обґрунтовано застосовність методу редукції до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаних при розв'язанні крайових задач;
- методи Максвела і Релея визначення ефективних пружних сталих сформульовано в термінах індукованих дипольних моментів еліптичних включень та запропоновано їх узагальнення на випадок багаточасткових моделей;
- шляхом аналізу значного об'єму розрахункових даних визначено закономірності впливу параметрів структури та умов контакту на границях розділу на концентрацію напружень та ефективні пружні модулі кусково-однорідних тіл з еліптичними включеннями.

**Достовірність отриманих результатів**. Достовірність результатів роботи забезпечується коректністю постановок розглянутих у роботі крайових задач, обґрунтованістю використаних фізичних і математичних моделей та методів, теоретичним обґрунтуванням та практичною перевіркою збіжності чисельних результатів та узгодженням отриманих чисельних результатів з відомими для частинних випадків літературними даними.

**Теоретична та практична цінність отриманих в роботі результатів.** Розвинутий метод може бути застосований до розв’язання широкого класу крайових задач теорії пружності для кусково-однорідних тіл з еліптичними поверхнями розділу та неідеальними умовами контакту. Одержані строгі розв’язки ряду модельних задач механіки композитів можуть бути використані у якості еталонних для оцінки точності та меж застосовності наближених підходів до визначення напруженого стану та макроскопічних властивостей композитних матеріалів. Розроблені програмні засоби дозволяють дослідити такі характерні для композитів явища як зумовлена взаємодією включень концентрація напружень, структурна чутливість макроскопічних властивостей, вплив недосконалості міжфазних границь і т.д., а отже, можуть бути використані при розробці нових композитів з необхідними фізико-механічними характеристиками.

**Особистий внесок здобувача.** Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, виконаним під науковим керівництвом доктора фіз.-мат. наук В.І. Куща. Представлені до захисту результати отримано здобувачем особисто. В опублікованих у співавторстві роботах дисертанту належить отримання нескінченних систем алгебраїчних рівнянь для одно- та багаточасткових задач та їх асимптотичний аналіз, отримання виразів для індукованих дипольних моментів еліптичних включень, розробка програмних засобів та чисельний аналіз закономірностей впливу неідеального контакту фаз та структурних параметрів на концентрацію напружень та ефективні пружні модулі кусково-однорідного тіла.

Науковому керівнику В.І. Кущу належить постановка задачі дослідження, ідея методу розв’язання багаточасткових задач, узагальнення методу Максвела для оцінки ефективних властивостей кусково-однорідних тіл, а також якісна оцінка і інтерпретація отриманих результатів.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на VII конференції молодих вчених «Надтверді композиційні матеріали та покриття: отримання, властивості та застосування» (Київ, 2014); 5-й Міжнародній конференції "Механіка руйнування матеріалів та міцність конструкцій" (Львів, 2014); First Summer School on Micromechanics (Bezmiechowa, Poland, 2015); IX конференції молодих вчених та спеціалістів “Надтверді композиційні матеріали та покриття: отримання, властивості, застосування” (Київ, 2016); XVIII International Conference "Dynamical System Modeling and Stability Investigations" (Kyiv, 2017); XXV науково-технічній конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України (Львів, 2017).

Дисертаційна праця у повному обсязі обговорювалася на науковому семінарі відділу комп’ютерного моделювання та механіки композиційних матеріалів Інституту надтвердих матеріалів ім. В. М. Бакуля НАН України під керівництвом чл.-кор. НАНУ, доктора технічних наук, професора А. Л. Майстренка, секції Вченої ради Інституту надтвердих матеріалів ім. В. М. Бакуля НАН України під керівництвом чл.-кор. НАНУ, доктора технічних наук, професора А. Л. Майстренка тана семінарі з наукового напрямку «Механіка композитних і неоднорідних середовищ» Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом чл.-кор. НАНУ, доктора фізико-математичних наук, професора Я.Я. Рущицького.

**Публікації.** Результати дисертаційної роботи відображено у 12 наукових працях, серед яких 3 статті в міжнародних наукових журналах; 3 статті у вітчизняних фахових виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз; 6 робіт у матеріалах конференцій. Опубліковані роботи з достатньою повнотою відображають зміст дисертації. В працях, що надруковані у співавторстві, В.І. Кущу і I. Sevostianov належить постановка задачі, ідея методу розв'язання багаточасткових задач, узагальнення методу Максвела для оцінки ефективних властивостей кусково-однорідних тіл; А.Л. Майстренку та G.S. Mishuris– систематизація та обговорення результатів. Особисто дисертанту належить отримання нескінченних систем алгебраїчних рівнянь для одно- та багаточасткових задач та їх асимптотичний аналіз, отримання виразів для індукованих дипольних моментів еліптичних включень, розробка програмних засобів та чисельний аналіз закономірностей впливу неідеального контакту фаз та структурних параметрів на концентрацію напружень та ефективні пружні модулі кусково-однорідного тіла.

**Структура і обсяг роботи.** Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаної літератури, що включає 129 найменувань. Загальний обсяг роботи становить 120 сторінок тексту, 35 рисунків та графіків,16 таблиць.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук В.І. Кущу за постійну увагу та допомогу при підготовці дисертації.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

**У вступі** обґрунтовано актуальність теми роботи, сформульовано мету і задачі досліджень, розкрито наукову новизну одержаних результатів, наведено відомості щодо їх практичного застосування. Наведено дані щодо апробації та структури роботи.

**В першому розділі** проведено аналіз літературних даних по проблематиці дослідження. Дослідження концентрації напружень на структурних неоднорідностях є однією з класичних проблем механіки, яка має значну бібліографію. Зокрема, успіхи в аналітичному дослідженні двовимірних задач лінійної теорії пружності значною мірою пов'язані з розвитком методу комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі. З його використанням в роботах С. Г.Лехницького, Д. І.Шермана, Г. М. Савіна, О. М. Гузя, В. В. Панасюка, Е. І. Григолюка і Л. А. Фільштинского, О. С. Космодаміанського, М .П. Саврука, Я. С. Підстригача, А. Ф. Улітка, Ю. М. Подільчука та багатьох інших вітчизняних і зарубіжних авторів досліджено широке коло задач про концентрацію напружень навколо включень, пор та тріщин в ізотропних та анізотропних тілах. Ці результати є теоретичною основою механіки структурно-неоднорідних матеріалів, якій присвячені багатотомні видання під редакцією Л. Браутмана і Р. Крока та О. М. Гузя, монографії Г. А. Ваніна, Р. Кристенсена, Т. Д. Шермергора, Л. П. Хорошуна і Б. П. Маслова, А. К. Малмейстера і В. П. Тамужа, Б. Є. Победрі, В. Т. Головчана,М. С. Бахвалова і Г. П. Панасенка, С. К. Канауна і В. М. Левіна,Я. Я. Рущицького, С. Немат-Насера і М. Горі та інших авторів, а також велика кількість журнальних публікацій.

Аналіз цих та інших літературних джерел, присвячених дослідженню локальних полів та ефективних властивостей структурно-неоднорідних матеріалів, доводить, що в абсолютній більшості робіт постулюється (явно чи неявно) умова ідеального контакту фаз, яка передбачає неперервність векторів переміщень і нормальних напружень на міжфазних границях. Прийнятність такої ідеалізації не є очевидною, оскільки реальні міжфазні границі є недосконалими з огляду на невідповідність атомних ґраток контактуючих матеріалів, а також наявність поверхневого окислення, міжфазних дифузійних/реакційних зон, дефектів, міжфазних тріщин тощо. Вказані фактори суттєво впливають на розподіл напружень і ефективні пружні властивості композиту і тому мають бути враховані в теоретичних моделях.

На даний час в літературі є ряд публікацій, присвячених аналізу впливу умов контакту на розподіл напружень в околі включень. Найбільш відомою в літературі умовою є так званий "м’який" контакт, при якому нормальні напруження неперервні, а стрибок переміщень на границі розділу лінійно пропорційний контактним напруженням. При "жорсткому" контакті, навпаки, має місце неперервність переміщень і стрибок нормальних напружень. Він очікується зокрема в наноструктурних матеріалах, де суттєвим фактором є поверхневі напруження, зумовлені впливом поверхневої енергії міжфазних границ. В таких матеріалах питома площа поверхні розділу фаз дуже велика, що обумовлює визначальний вплив міжфазної границі на їхні властивості. Недосконалість міжфазних границь з необхідністю породжує залежність пружної поведінки композита від характерного розміру неоднорідностей.

Втім, відомі в літературі дослідження стосуються переважно включень з постійною кривизною поверхні (сферичних та круглих), для яких врахування неідеального контакту в фізичній моделі не призводить до ускладнення відповідної математичної задачі. Для включень більш загальної еліптичної форми відомі лише окремі результати. Дослідження пружної поведінки композитів з еліптичними волокнами і недосконалим контактом фаз в літературі обмежено роботами H. Shen та ін. (2000) про одне еліптичне включення з однорідно недосконалою міжфазною границею та J. Luo і X. Wang (2009), де розглянуто поздовжній зсув простору з одним еліптичним нановключенням. На підставі проведеного аналізу літературних джерел зроблено висновок про актуальність взятої до розгляду проблеми, сформульовано мету і задачі дослідження.

**В другому розділі** досліджено задачу про пружну рівновагу простору (матриці) з одним включенням у вигляді еліптичного циліндра при антиплоскому зсуві уздовж осі циліндра$Ox_3$. Осі $Ox_1$ та $Ox_2$ $x_2$ орієнтовані уздовж півосей еліпса $l_1$ та $l_2$. Параметр форми еліпса $e = l_2/l_1 < 1$, фокальна відстань $d = \sqrt{l_1^2 - l_2^2}$. Дана задача є двовимірною, причому лише осьове переміщення $u_3$ є ненульовим:

$$u_1 = u_2 = 0; \quad u_3 = w(x_1, x_2); \tag{2.1}$$

Рівняння пружної рівноваги $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$ має вигляд $\partial\sigma_{13}/\partial x_1 + \partial\sigma_{23}/\partial x_2 = 0,$закон Гука спрощується до

$$\sigma_{i3} = 2\mu\varepsilon_{i3} = \mu\partial w/\partial x_i, \quad i = 1,2; \tag{2.2}$$

а осьове переміщення є гармонічною функцією координат: $\nabla^2 w = 0$.

Розглянуто два типи недосконалого пружного контакту включення з матрицею. Недосконалий контакт першого типу (так званий "м'який" контакт) відповідає пружинній моделі і передбачає неперервність нормального напруження $\sigma_n$ на еліптичній границі розділу *L*, тоді як стрибок переміщення є пропорційним нормальному напруженню з коефіцієнтом $h_1$ розмірності [Н/м$^3$]:

$$[\![\sigma_n]\!]_L = 0; \quad h_1 [\![w]\!]_L = \sigma_n. \tag{2.3}$$

Параметр $h_1$ є додатковим до модуля зсуву матеріальним параметром даної задачі. Для ідеального контакту $h_1 = \infty$, відсутності контакту відповідає $h_1 = 0$. "Жорсткий", або мембранний тип границі (у подальшому - контакт другого типу), навпаки, передбачає неперервність переміщень і стрибок нормальних напружень, пропорційний дотичній похідній поверхневого напруження. Ця умова є частинним випадком моделі поверхневих напружень Гуртіна-Мердока і має вигляд

$$[\![w]\!]_L = 0; \quad [\![\sigma_n]\!]_L = -\frac{\partial\sigma_t^s}{\partial t}; \tag{2.4}$$

де $\sigma_t^s = 2h_2\partial w/\partial t$ ,$h_2 = (\mu^s - \tau^0)$, $\mu^s$ і $\tau^0$ - пружні модулі міжфазної поверхні розмірності [Н/м]. Розмірність матеріальних параметрів міжфазної поверхні в обох випадках відрізняється від розмірності [Н/м$^2$] об'ємних пружних модулів. Це обумовлює характерний для композитів з неідеальним контактом фаз розмірний ефект, а саме залежність напруженого стану від розміру включень.

Розвинутий в роботі аналітичний підхід використовує метод комплексних потенціалів, де поряд з традиційною комплексною змінною $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$ введено "еліптичну" комплексну змінну $\xi = \zeta + \mathrm{i}\eta$:

$$z = d\cosh\xi = d(\upsilon + \upsilon^{-1})/2, \quad \upsilon = \exp\xi \quad (0 \le \xi < \infty, \; 0 \le \eta < 2\pi). \tag{2.5}$$

Осьове переміщення шукаємо у вигляді $w = \operatorname{Re}\varphi$, де $\varphi(z)$- комплексний потенціал. Відповідне комплексне напруження $\sigma = \sigma_{13} + \mathrm{i}\sigma_{23} = \mu\overline{\varphi'(z)}$, де модуль зсуву $\mu = \mu_0$ для матриці і $\mu = \mu_1$ для включення. При запису умов контакту першого типу в термінах комплексних потенціалів

$$[\![\mu \operatorname{Im}\varphi(z)]\!]_L = 0, \quad h_1[\![\operatorname{Re}\varphi]\!]_L - \mu\frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial n} = 0, \tag{2.6}$$

враховано, що умова неперервності нормальних напружень $[\![\sigma_n]\!]_L = 0$ еквівалентна умові $[\![\mu \operatorname{Im}\varphi(z)]\!]_L = 0$. Умова контакту другого типу в термінах комплексних потенціалів має вигляд

$$[\![\operatorname{Re}\varphi]\!]_L = 0; \quad [\![\mu \operatorname{Im}\varphi]\!]_L - h_2\frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial t} = 0, \tag{2.7}$$

Доповнює постановку крайової задачі умова зовнішнього навантаження у вигляді регулярного в околі включення переміщення $w_{far}$ чи відповідних йому деформації

$\varepsilon^{\infty}=\varepsilon_{13}^{\infty}+\mathrm{i}\varepsilon_{23}^{\infty}$ або напруження $\sigma^{\infty}=\sigma_{13}^{\infty}+\mathrm{i}\sigma_{23}^{\infty}=2\mu_0\varepsilon^{\infty}$. Для однозначності розв'язку задачі в переміщеннях покладено $w^{(1)}(0)=0$.

Регулярне в еліптичному включенні переміщення шукаємо у вигляді ряду по еліптичним гармонікам $\upsilon^k$:

$$w^{(1)}=\mathrm{Re}\varphi_1,\quad \varphi_1=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\left(\upsilon^k+\upsilon^{-k}\right),\tag{2.8}$$

де $B_k$ - невідомі комплексні коефіцієнти. Розвинення в степеневий ряд регулярного в околі включення переміщення $w_{far}$ є аналогічним (2.8):

$$w_{far}=\mathrm{Re}\varphi_{far},\quad \varphi_{far}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\upsilon^k+\upsilon^{-k}\right),\tag{2.9}$$

де $a_k=a_{-k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}w_{far}\tau^k d\eta$ - комплексні коефіцієнти ряду, які ми вважаємо відомими, $\tau=\exp(\mathrm{i}\eta)$. Переміщення точок матриці запишемо у вигляді суми $w^{(0)}=w_{far}+w_{dis}$, де $w_{dis}$ - збурення поля, зумовлене включенням. Відповідно,

$$w^{(0)}=\mathrm{Re}\varphi_0,\quad \varphi_0=\varphi_{far}+\varphi_{dis}.\tag{2.10}$$

З огляду на асимптотичну поведінку збурення від включення ($w_{dis}\to 0$ при $|z|\to\infty$) розвинення $\varphi_{dis}$ в ряд Лорана містить лише еліптичні гармоніки з $k<0$, тобто

$$\varphi_0=\sum_k\left(A_k+a_k\right)\upsilon^{-k},\tag{2.11}$$

де комплексні коефіцієнти $A_k\equiv 0$ для $k\le 0$.

Виконання умови першого другого типу (2.6) еквівалентне розв'язанню системи алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів розвинення цієї умови в ряд Лорана:

$$\int_0^{2\pi}[[\mu\,\mathrm{Im}\varphi(z)]]_L\tau^k d\eta=0,\quad \int_0^{2\pi}\left(h_1[[\mathrm{Re}\varphi]]_L-\mu\frac{\partial\,\mathrm{Re}\varphi}{\partial n}\right)\tau^k d\eta=0\quad (k=1,2,\ldots).\tag{2.12}$$

Підстановка розвинень (2.8) - (2.11) в (2.12) дає після алгебраїчних перетворень нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $A_k$:

$$\begin{gathered}(\tilde{\mu}_1+1)A_k-2\frac{A_k\upsilon_0^{-2k}}{\left(\upsilon_0^{-2k}-\upsilon_0^{2k}\right)}-2\frac{\overline{A_k}}{\left(\upsilon_0^{-2k}-\upsilon_0^{2k}\right)}+(\tilde{\mu}_1-1)\left(a_k+\overline{a_k}\upsilon_0^{2k}\right)\\+\sum_{n=1}^{\infty}n\upsilon_0^{k-n}\left(A_n\beta_{k-n}+\overline{A_n}\beta_{k+n}\right)+\sum_n n\upsilon_0^{k-n}\left(a_n\beta_{k-n}+\overline{a_n}\beta_{k+n}\right)=0;\end{gathered}\tag{2.13}$$

де

$$\beta_k=\beta_{-k}=-\frac{1}{2\pi}\tilde{h}_1\int_0^{2\pi}\frac{\tau^k d\eta}{\sqrt{1+\alpha\sin^2\eta}}.\tag{2.14}$$

Тут $\tilde{h}_1=\mu_1/(h_1 l_2)$ - безрозмірний параметр для умови першого роду, $\tilde{\mu}_1=\mu_1/\mu_0$. Запропоновано ефективну рекурентну процедуру для обчислення $\beta_k$ при великих значеннях $k$. Процедура виконання умов другого типу цілком аналогічна викладеній вище і дає аналогічну (2.13) систему рівнянь, яка містить безрозмірний параметр для контактних умов другого роду $\tilde{h}_2=h_2/(\mu_0 l_1)$.

За умови неідеального контакту включення з матрицею навіть у випадку одного еліптичного включення лінійна система (2.13) містить нескінчену кількість рівнянь і невідомих. Винятками тут є лише частинні випадки ідеального контакту $h_1 = \infty$, повної відсутності контакту $h_1 = 0$ та постійної кривизни границі розділу (кругле включення). Досліджено асимптотику коефіцієнтів матриці алгебраїчної системи та доведено їх належність до класу систем з нормальним визначником, а отже застосовність до її аналізу методу редукції, який полягає в утриманні в системі скінченої кількості рівнянь і невідомих і дає чисельний розв'язок задачі з довільною точністю $\varepsilon$ при утриманні належної кількості гармонік $n_{\max}$. Проведено чисельний аналіз залежності швидкості збіжності розв'язку від вхідних параметрів задачі і встановлено значення $n_{\max}$, які забезпечують його практичну збіжність.

На основі одержаного теоретичного розв'язку розроблено комп'ютерні програми та проведено аналіз концентрації напружень навколо еліптичної неоднорідності з недосконалою границею розділу. Одним з наслідків неідеальності контакту є неоднорідність поля напружень у об'ємі включення і зумовлена ним необхідність врахування вищих гармонік. Це демонструють наведені на рис. 2.1 графіки розподілу $\tilde{\sigma}_{13} = \sigma_{13}/\sigma_{13}^{\infty}$ $(\sigma_{23}^{\infty} = 0)$ уздовж осі $Ox_1$ у включенні з $e$ = 1/3 та матриці для неідеального контакту першого типу, $\mu_1 = 30$. Криві 1-4 розраховано для значень $\tilde{h}_1 = 0.05$, 0.5 5 і ∞ відповідно. Оскільки більшість теорій механіки композитів суттєво базується на припущенні постійності напружень у включеннях, їх застосування до композитів з недосконалими границями розділу не є коректним. На рис. 2.2 подано значення коефіцієнта концентрації напруження (ККН) $\tilde{\sigma}_{23} = \sigma_{23}/\sigma_{23}^{\infty}$ $(\sigma_{13}^{\infty} = 0)$ в точці $z = l_1$ на поверхні еліптичної пори за наявності поверхневих напружень (частинний випадок контактних умов другого типу) як функції форми $e$. Для $\tilde{h}_2 = 0$ і $e \to 0$, коли еліпс вироджується в тріщину з вільною від напружень поверхнею, ККН очікувано зростає до нескінченості (крива 1). За наявності ж поверхневих напружень ($\tilde{h}_2 = 0.002$, крива 2; $\tilde{h}_2 = 0.004$, крива 3) обчислення прогнозують скінченність $\sigma_{23}$ при $e \to 0$. Цей результат узгоджується з літературними даними аналізу напружень в околі тріщини з поверхневими напруженнями, а також з одержаною в роботі асимптотичною формулою для $\sigma_{23}$ при $e \to 0$ (світлі кружечки на рис. 2.2). Темними кружками на рисунку показано дані роботи Luo & Wang (2009) для $\tilde{h}_2$ = 0.002 . Має місце неузгодженість цих даних та кривої 2 при $e \le 0.05$, ймовірною причиною якої є використання при розрахунках в Luo & Wang (2009) значення $n_{\max}$, недостатнього для збіжності розв'язку. Як показує практика обчислень, для забезпечення відносної похибки в 0.1% для ККН на дуже тонкій ($e = 0.001$) порі, необхідно врахувати $n_{\max} = 5000$ членів ряду.

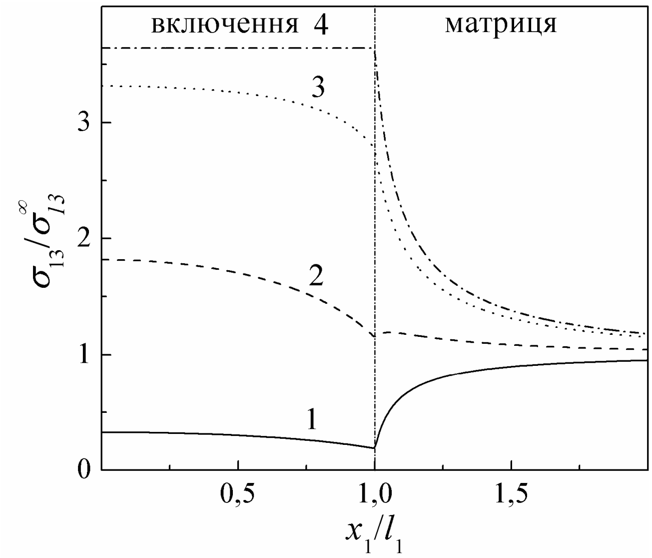


Рис. 2.1. Розподіл $\tilde{\sigma}_{13} = \sigma_{13}/\sigma_{13}^{\infty}$ у включенні з $e$ = 1/3 та матриці уздовж осі $Ox_1$ в залежності від $h_1$

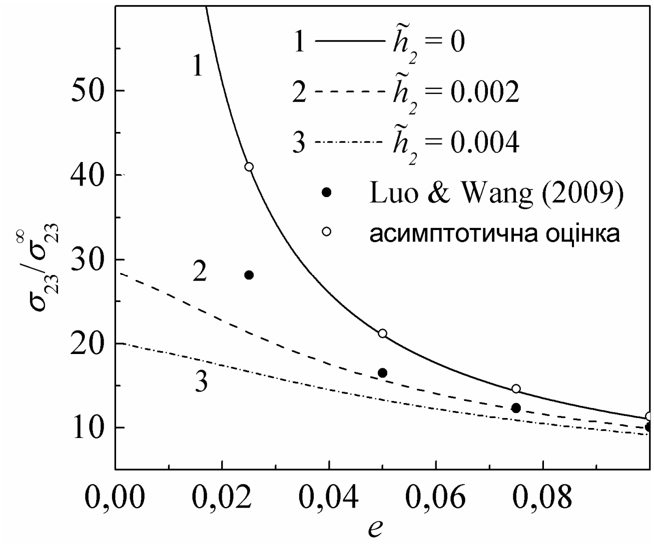


Рис. 2.2. Залежність концентрації напруження $\tilde{\sigma}_{23} = \sigma_{23}(l_1)/\sigma_{23}^{\infty}$ від параметра форми $e$ еліптичної пори

**В третьому розділі** досліджено задачі про пружну рівновагу кусково-однорідного тіла зі скінченною множиною та періодичною системою еліптичних включень. Напружений стан таких тіл залежить від розміру, форми та взаємного положення і орієнтації включень. Додатковим чинником, який впливає на розподіл напружень в кусково-однорідному тілі, є недосконалі границі розділу.

Структурна модель першої багаточасткової задачі є кластер з $N > 1$ еліптичних включень, контури яких не перетинаються. В загальному випадку включення є різними за розміром, формою, орієнтацію та модулем зсуву. Типовий вигляд кластера подано на рис. 3.1. Як і у випадку задачі з одним еліптичним включенням, розглянуто два типи умов недосконалого контакту на границях $L_q$, ($q$=1, ..., $N$) а саме умови першого (2.6) та другого (2.7) типу. Контактні умови та відповідні пружні властивості міжфазної поверхні можуть варіюватись від включення до включення. Зовнішнє навантаження задано постійною деформацією $\varepsilon^{\infty} = \varepsilon_{13}^{\infty} + \mathrm{i}\varepsilon_{23}^{\infty}$ або напруженням $\sigma^{\infty} = \sigma_{13}^{\infty} + \mathrm{i}\sigma_{23}^{\infty} = 2\mu_0\varepsilon^{\infty}$. Відповідне їм лінійне переміщення має вигляд $w_{far} = \varepsilon_{13}^{\infty}x_1 + \varepsilon_{23}^{\infty}x_2 = \mathrm{Re}(\varphi^{\infty})$, $\varphi^{\infty} = \overline{\varepsilon^{\infty}}z$. Збурення поля переміщень від скінченої множини включень прямує до нуля на нескінченості, тому маємо асимптотичну умову $w \to w_{far}$ при $|z| \to \infty$. Для забезпечення однозначності розв'язку в переміщеннях покладемо $w^{(1)}(0) = 0$.

Напружений стан кусково-однорідного тіла з множиною включень є суперпозицією збурень на окремих включеннях і при постійному зовнішньому навантаженні змінюється в широких межах в залежності від відстані між включеннями, їхніх розмірів, форми та взаємної орієнтації. Збурення зовнішнього поля від кожного включення є додатковим зовнішнім навантаженням для решти включень і навпаки, збурення від усіх інших включень входять в зовнішнє поле, яке діє на виділене включення. Тому розглянута в розділі 2 задача має бути розв'язана для всіх включень одночасно з урахуванням їх взаємного впливу.

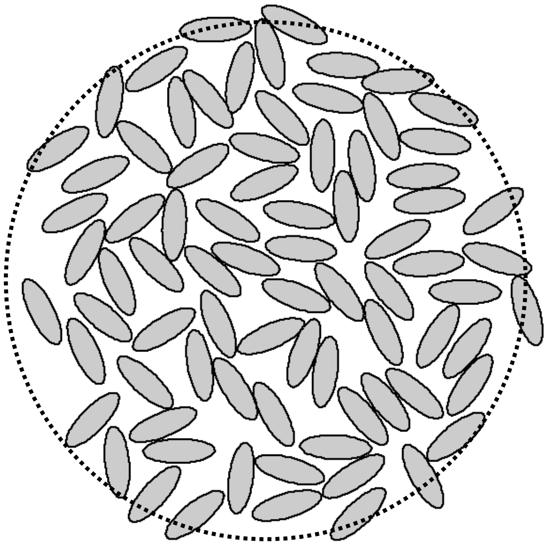

Рис. 3.1. Скінченний кластер еліптичних включень

Рис. 3.2. Представницька комірка композиту періодичної структури

З огляду на вищесказане, вираз для переміщення в матриці $w^{(0)}$ взято у вигляді суми дальнього поля $w_{far}$ та збурень $w_s^{(p)}$ від окремих включень:

$$w^{(0)} = \mathrm{Re}\varphi_0 = w_{far} + \sum_{p=1}^{N} w_s^{(p)} \quad . \tag{3.1}$$

Відповідний комплексний потенціал

$$\varphi_0(z) = \varphi^{\infty}(z) + \sum_{p=1}^{N} \varphi_{dis}^{(p)}(z_p), \tag{3.2}$$

де $z_p$ - комплексна змінна в локальній координатній системі $p$-го еліпса. По аналогії з (2.11), розвинення $\varphi_{dis}^{(p)}$ в ряд Лорана містить лише еліптичні гармоніки з $k<0$, тобто

$$\varphi^{(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(p)} (\upsilon_p)^{-n} \quad , \tag{3.3}$$

$\upsilon_p = \upsilon(z_p) = \exp\xi_p$ і $A_n^{(p)}$ - невідомі комплексні сталі. Переміщення у включеннях має вигляд степеневого ряду (2.8) по локальній комплексній змінній $\upsilon_p$.

Доданки в (3.2) є функціями змінних різних криволінійних координатних систем, тому для виконання контактних умов (2.6) чи (2.7) на границі $L_q$ необхідно мати їх вираз в локальних криволінійних змінних $(\zeta_q, \eta_q)$. Для його одержання використано формули перерозкладу еліптичних гармонік при переносі і повороті системи координат

$$\upsilon_p^{-n} = \sum_m \eta_{nm}^{pq} \upsilon_q^{-m}, \tag{3.4}$$

де коефіцієнти перерозкладу у загальному випадку обчислюють як інтеграл

$$\eta_{nm}^{pq} = \eta_{nm}(Z_{pq}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\upsilon_p)^{-n} \,|_{\zeta_q = 0} \cos(m\eta_q) d\eta_q. \tag{3.5}$$

Для достатньо віддалених ($|Z_{pq}| = |Z_q - Z_p| > |d_p + d_q|, Z_p$ – комплексна змінна, координата центру $p$-го включення) еліптичних координатних систем, формула (3.5) спрощується до

$$\eta_{nm}^{pq} = nd_p^n(-1)^m \sum_{l=0}^{\infty} d_q^{2l+m} M_{nml}(d_p, d_q) \frac{(n+m+2l-1)!}{(2Z_{pq})^{n+m+2l}},$$
$$M_{nml}(d_p, d_q) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(d_p / d_q)^{2k}}{k!(l-k)!(k+n)!(m+l-k)!}. \qquad (3.\ 6)$$

Оптимальною стратегією обчислень є використання (3.5) для найближчих сусідів і (3.6) - для решти включень.

Отримане з використанням (3.4) локальне розвинення (3.2) має вигляд

$$\varphi_0 = \sum_k \left(A_k^{(q)} + a_k^{(q)}\right)(\upsilon_q)^{-k}, \qquad (3.7)$$

де $A_k^{(q)} \equiv 0$ для $k \le 0$, а коефіцієнти регулярної частини розв'язку ($a_{-k}^{(q)} = a_k^{(q)}$) визначаються формулою

$$a_k^{(q)} = \sum_{\substack{p=1 \\ (p \ne q)}}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(p)} \eta_{nk}^{pq} + \delta_{k,\pm1} \overline{\varepsilon^{\infty}} d_q\ , \qquad (3.8)$$

де $\delta_{ij}$ - дельта Кронекера. Подальші перетворення, аналогічні викладеним у розділі 2, дають для випадку умов першого типу нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно коефіцієнтів $A_k^{(q)}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n^{(q)} V_{nk}^{(1)} + \overline{A_n^{(q)}} V_{nk}^{(2)} + a_n^{(q)} v_{nk}^{(1)} + \overline{a_n^{(q)}} v_{nk}^{(2)}\right) = 0$$
$$q = 1,2,...,N; \quad k = 1,2,...; \qquad (3.9)$$

де

$$V_{nk}^{(1)} = -n\upsilon_{0q}^{-n}\beta_{k-n} + \delta_{nk}\left[\left(\tilde{\mu}_q + 1\right) - \frac{2\upsilon_{0q}^{-2n}}{\upsilon_{0q}^{-2n} - \upsilon_{0q}^{2n}}\right]\upsilon_{0q}^{-n};$$
$$V_{nk}^{(2)} = n\upsilon_{0q}^{-n}\beta_{k+n} + \delta_{nk}\frac{2\upsilon_{0q}^{-n}}{\upsilon_{0q}^{-2n} - \upsilon_{0q}^{2n}}; \qquad (3.10)$$

$$v_{nk}^{(1)} = -n\upsilon_{0q}^{-n}\beta_{k-n} + n\upsilon_0^{n}\beta_{k+n} - \delta_{nk}\left(\tilde{\mu}_q - 1\right)\upsilon_{0q}^{-n};$$
$$v_{nk}^{(2)} = n\upsilon_{0q}^{-n}\beta_{k+n} - n\upsilon_{0q}^{n}\beta_{k-n} + \delta_{nk}\left(\tilde{\mu}_q - 1\right)\upsilon_{0q}^{n}. \qquad (3.11)$$

Для умов другого типу система рівнянь має аналогічний вигляд з заміною виразів для $V_{nk}^{(i)}$ на

$$V_{nk}^{(1)} = -n\upsilon_{0q}^{-n}\beta_{k-n} + \delta_{nk}\left[\left(\tilde{\mu}_q + 1\right) - \frac{2\tilde{\mu}_q\upsilon_{0q}^{-2n}}{\upsilon_{0q}^{-2n} - \upsilon_{0q}^{2n}}\right]\upsilon_{0q}^{-n},$$
$$V_{nk}^{(2)} = n\upsilon_{0q}^{-n}\beta_{k+n} + \delta_{nk}\frac{2\tilde{\mu}_q\upsilon_{0q}^{-n}}{\upsilon_{0q}^{-2n} - \upsilon_{0q}^{2n}}. \qquad (3.12)$$

Їх чисельне розв'язання методом редукції, застосовність якого обгрунтовано теоретично шляхом аналізу асимптотичних властивостей нескінченої системи (3.9), завершує побудову розв'язку.

Структурна модель другої багаточасткової задачі є кусково-однорідне тіло узагальненої періодичної структури, представницьку комірку якої показано на рис. 3.2. За умови макроскопічної однорідності деформацій і напружень поле переміщень в такому тілі є квазіперіодичною функцією координат:

$$w(z+a)-w(z)=\varepsilon_{13}^{\infty}a; \quad w(z+\mathrm{i}a)-w(z)=\varepsilon_{23}^{\infty}a\,, \tag{3.13}$$

де $\varepsilon_{i3}^{\infty}=\langle\varepsilon_{i3}\rangle$ - макроскопічні деформації поздовжнього зсуву. Аналітичний розв'язок цієї задачі в цілому аналогічний викладеному вище, відмінність полягає у використанні у якості базисних функцій періодичних комплексних потенціалів

$$\hat{\upsilon}_n(z)=\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}\left[\upsilon(z+a(k_1+\mathrm{i}k_2))\right]^{-n}. \tag{3. 14}$$

З огляду на періодичність структури і розв'язку(3.13), виконання контактних умов для включень в межах структурної комірки забезпечує виконання цих умов для усієї нескінченої множини включень і приводить до системи рівнянь (3.9), де коефіцієнти перерозкладу $\eta_{nm}^{pq}$ замінено відповідними гратковими сумами

$$\eta_{nm}^{*pq}=\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}\eta_{nm}\left[Z_{pq}+a(k_1+\mathrm{i}k_2)\right]. \tag{3.15}$$

Ефективна процедура їх сумування використовує ф-лу (3.5) для $k_1=k_2=0$ і (3.6) для решти доданків і зводиться до обчислення граткових сум $\sum\left[Z_{pq}+a(k_1+\mathrm{i}k_2)\right]^{-n}$.

Одержані теоретичні розв'язки реалізовано у вигляді комп'ютерних програм та проведено аналіз концентрації напружень в залежності від пружних властивостей включень, їх геометрії, взаємного розташування та неідеальності контакту. Наведені на рис. 3.3 і 3.4 чисельні дані ілюструють взаємовплив двох однаково орієнтованих еліптичних включень з $e=1/3$, $\tilde{\mu}_1=10$, центри яких лежать на осі $Ox_1$, а на границі з матрицею має місце контакт першого типу. На рис. 3.3 подано розподіл напруження $\sigma_{23}/\sigma_{23}^{\infty}$ на контурі першого включення при відстані між включеннями $Z_{12}/=2.1l_1$.

Напруження очікувано зростають по мірі зменшення параметра $\tilde{h}_1$, який характеризує ступінь неідеальності контакту між матрицею та включеннями. Залежність концентрації напруження $\sigma_{23}/\sigma_{23}^{\infty}$ в точці $z=l_1$ від параметра $\tilde{h}_1$ при різних відстанях між центрами включень показано на рис. 3.4.

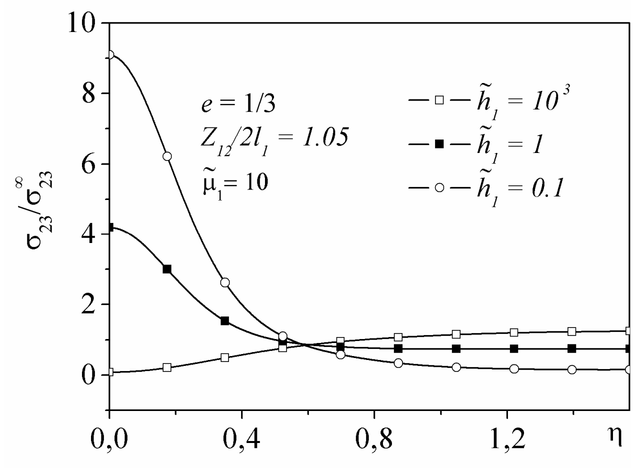


Рис. 3.3 Розподіл напружень навколо еліптичного включення

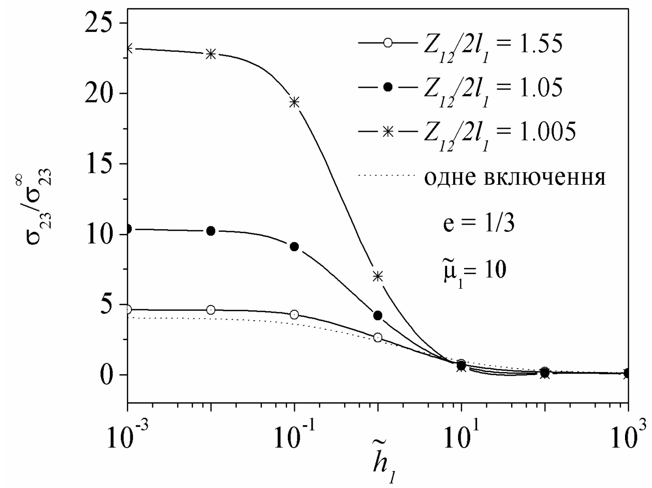


Рис. 3.4. Вплив недосконалості контакту на концентрацію напружень

Взаємний вплив включень призводить до суттєвого росту напруження, яке для $Z_{12} = 2.1$ і $Z_{12} = 2.01$ перевищує його значення для одного включення в два і п'ять разів відповідно (пунктирна лінія на рис. 3.4).

**Четвертий розділ** присвячено дослідженню ефективних пружних модулів поздовжнього зсуву композита з волокнами еліптичного профілю за неідеального контакту фаз. У випадку антиплоского зсуву задача гомогенізації має вигляд

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = 2\boldsymbol{\mu}^* \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\mu}^* \cdot \langle \nabla w \rangle, \quad \text{де } \boldsymbol{\mu}^* = \begin{Bmatrix} \mu_{11}^* & \mu_{12}^* \\ \mu_{21}^* & \mu_{22}^* \end{Bmatrix}. \tag{4.1}$$

В (4.1) $\langle \nabla w \rangle$- макроскопічний градієнт переміщень, $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \{\langle \varepsilon_{13} \rangle, \langle \varepsilon_{23} \rangle\}^{\mathrm{T}}$ і $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \{\langle \sigma_{13} \rangle, \langle \sigma_{23} \rangle\}^{\mathrm{T}}$ - вектори деформацій і напружень зсуву відповідно. Показано, що традиційний спосіб визначення макроскопічних сталих як усереднених по об'єму є некоректним для композитів з неідеальною міжфазною границею. Використано підхід довизначення макроскопічних сталих, який базується на поверхневому усередненні і одержано формули для макроскопічних деформацій та напружень для антиплоского зсуву у вигляді

$$\langle \nabla w \rangle \overset{def}{=} \frac{1}{S} \int_{L_0} w \mathbf{n} \, \mathrm{d}L, \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \overset{def}{=} \frac{1}{S} \int_{L_0} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \, \mathrm{d}L, \tag{4.2}$$

де $L_0$ - зовнішня границя представницького елемента $S$, і $\mathbf{n} = n_k \mathbf{i}_k$ - одиничний вектор нормалі.

Важливим параметром задачі гомогенізації є індукований дипольний момент включення $\mathbf{p} = p_k \mathbf{i}_k$, який визначає асимптотичну поведінку зумовленного цим включенням збурення поля переміщень. Загальний спосіб його обчислення використовує закон збереження дипольного моменту включення $S_1$

$$\int_L \left[ w^{(0)} \sigma_n(\mathbf{r}) - \sigma_n(w^{(0)}) \mathbf{r} \right] \mathrm{d}L = \begin{cases} \mathbf{p} & \text{для } S_1 \in S, \\ 0 & \text{для } S_1 \notin S, \end{cases} \tag{4.3}$$

де $\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k$ - радіус-вектор і $L$ - границя довільної області $S$. Формули (4.2), (4.3) і усі наступні справедливі для включень довільної форми і властивостей та довільних умов їх пружного контакту з матрицею. Зв'язок дипольних моментів з макроскопічним напруженням дає формула

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \langle \nabla w \rangle + \frac{1}{S} \sum_{q=1}^{N} \mathbf{p}^{(q)}, \tag{4.4}$$

де $\mathbf{p}^{(q)}$ - дипольний момент $q$-го включення. Вираз для дипольного моменту еліптичного включення в комплексних змінних має простий вигляд

$$p = p_1 + ip_2 = \mu_0 \int_L \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial n} z - n w^{(0)} \right) \mathrm{d}L = \mu_0 \pi d A_1, \tag{4.5}$$

де $A_1$ - перший коефіцієнт розкладу (2.11).

Формальний запис модифікованої схеми Максвела для композита з еліптичними включеннями і недосконалим контактом фаз в термінах дипольних моментів має вигляд

$$\sum_{q=1}^{N} \mathbf{p}^{(q)}\left(\mu_q / \mu_0\right) = \mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}^* / \mu_0), \qquad \sum_{q=1}^{N} S_q = cS_{eq}, \tag{4.6}$$

де $c$ - об'ємний вміст включень, $S_{eq}$ - площа еквівалентного (анізотропного у загальному випадку) включення тієї ж форми, що і фрагмент реального кусково-однорідного тіла (рис. 3.1). Застосування схеми Максвела полягає у розв'язанні задачі для скінченного кластера включень, підстановці визначених згідно (4.5) дипольних моментів $\mathbf{p}^{(q)}$ в рівняння (4.6) і його розв'язанні відносно $\boldsymbol{\mu}^*$. На відміну від стандартної схеми Максвела, яка прогнозує ефективні властивості з точністю $O(c)$, модифікований багаточастковий метод Максвела забезпечує обчислення ефективних пружних сталих з заданою точністю і тому має підстави розглядатись як строгий метод мікромеханіки.

Підхід Релея до визначення макроскопічних сталих полягає у моделюванні кусково-однорідного тіла деякою періодичною структурою і усередненні локальних полів, знайдених з розв'язку крайової задачі на комірці періодичності. Елементарна комірка узагальненої періодичної структури є квадрат зі стороною $a$ (рис. 3.2), $L_0$ і $S = a^2$ - його периметр і площа. Ефективні модулі такого композиту визначено законом Гука (4.2) для макроскопічних деформацій і напружень, які в комплексних змінних мають вигляд

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2S} \int_{L_0} wn \, \mathrm{d}L, \quad \langle \sigma \rangle = \frac{1}{S} \int_{L_0} \mathrm{Re}(\sigma \overline{n}) z \, \mathrm{d}L \tag{4.7}$$

Обчислення інтегралів (4.7) є елементарним: так, умова квазіперіодичності переміщень (3.13) дає одразу $\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon^\infty$. Вираз для макроскопічного комплексного напруження $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{13} \rangle + \mathrm{i} \langle \sigma_{23} \rangle$ є прямим наслідком рівнянь (4.2) і (4.4):

$$\frac{\langle \sigma \rangle}{2\mu_0} = \langle \varepsilon \rangle + \frac{1}{2\mu_0 a^2} \sum_{q=1}^{N} p^{(q)} = \langle \varepsilon \rangle + \frac{\pi}{2a^2} \sum_{q=1}^{N} d_q A_1^{(q)}. \tag{4.8}$$

Формула (4.8), в якій коефіцієнти $A_1^{(q)}$ обчислені з крайової задачі для комірки періодичності (рис. 4.1),і (4.2) є достатніми для визначення тензора ефективних пружних модулів $\boldsymbol{\mu}^*$.

На рис. 4.1 показано одержані модифікованим методом Релея ефективні пружні модулі $\tilde{\mu}_{11}^{*}$ і $\tilde{\mu}_{22}^{*}$ періодичного композита як функцію $\tilde{h}_1$. Композит містить абсолютно жорсткі включення ($\tilde{\mu}_1 = \infty$) з параметром форми $e = 0.2$, об'ємний вміст включень $c = 0.3$, $0.5$ і $0.7$. Обчислення показують, що макроскопічна пружність при $\tilde{h}_1 \geq 100$ близька до пружності композита з ідеальним контактом фаз.

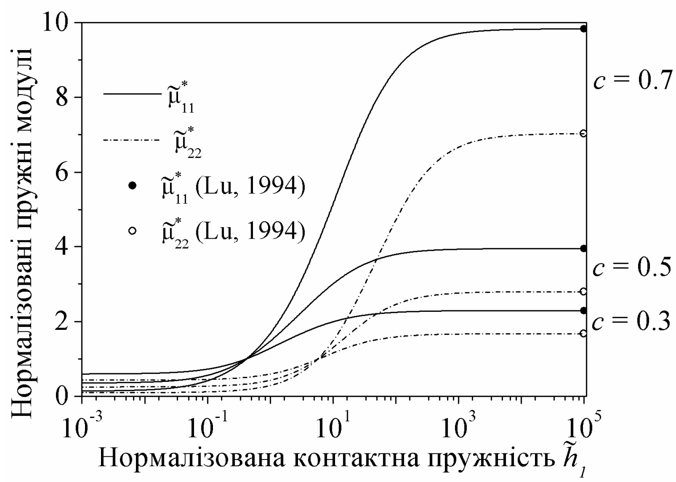


Рис. 4.1 Ефективні пружні модулі поздовжнього зсуву композита з періодичною граткою еліптичних включень, $e = 0.2$

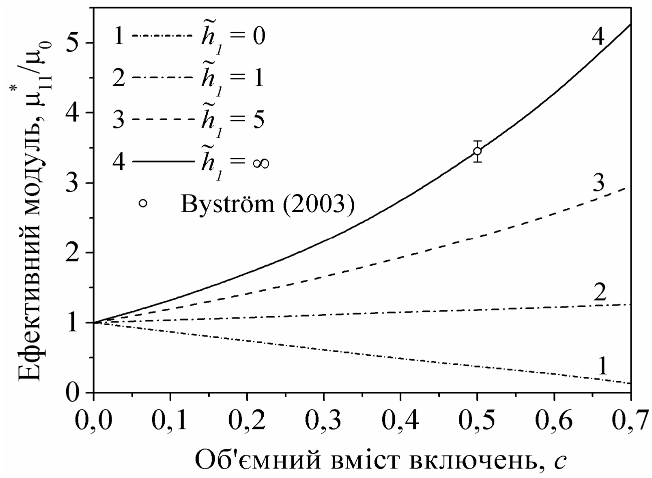


Рис. 4.2.Ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}_{11}^{*}$ композита з випадково розташованими однаково орієнтованими еліптичними включеннями, $e = 1/3$

У цьому випадку наші результати співпадають з показаними темними і світлими кружками літературними даними, що свідчить про коректність теоретичного розв'язку і розробленого на його основі чисельного алгоритму. Для $\tilde{h}_1 < 0.1$ пружні модулі композита близькі до пористого тіла попри абсолютну жорсткість включень. Цей приклад яскраво демонструє, що міжфазна границя суттєво впливає на ефективну пружність композиту і тому має бути врахована при його моделюванні. Концентраційні залежності пружного модуля $\tilde{\mu}_{11}^{*}$ композита з $e = 1/3$ і $\tilde{\mu}_1 = 10$ подано на рис. 4.2. Криві 1-4 відповідають значенням $\tilde{h}_1 = 0$, 5, 10 і $\infty$. Наведені дані для $h_1 = \infty$ узгоджуються з літературними даними, показаними світлими кружками. Чисельні значення ефективних пружних модулів для випадку скінченої контактної пружності $h_1$ одержано вперше.

Таблиці 4.5 і 4.6 містять обчислені ефективні модулі поздовжнього зсуву $\tilde{\mu}_{11}^{*}$ і $\tilde{\mu}_{22}^{*}$ періодичного композита в залежності від об'ємного вмісту включень, фазового контрасту $\tilde{\mu}_1$ і нормалізованої контактної пружності $\tilde{h}_1$. Параметр форми включень $e = 1/3$. Наведені результати демонструють суттєвий вплив міжфазної границі на макроскопічну пружність композита, а для випадку досконалого контакту ($\tilde{h}_1 = \infty$)

Табл. 4.5. Ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}_{11}^*$

| $c$ | $\tilde{\mu}_1 = 1$ | | | $\tilde{\mu}_1 = 10$ | | | $\tilde{\mu}_1 = 1000$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\tilde{h}_1 = 0$ | $\tilde{h}_1 = 10$ | $\tilde{h}_1 = \infty$ | $\tilde{h}_1 = 0$ | $\tilde{h}_1 = 10$ | $\tilde{h}_1 = \infty$ | $\tilde{h}_1 = 0$ | $\tilde{h}_1 = 10$ | $\tilde{h}_1 = \infty$ |
| 0.1 | 0.8611 | 0.9937 | 1.0 | 0.8611 | 1.2084 | 1.2559 | 0.8611 | 1.2836 | 1.3564 |
| 0.3 | 0.5890 | 0.9812 | 1.0 | 0.5890 | 1.6409 | 1.8110 | 0.5890 | 1.8825 | 2.1595 |
| 0.5 | 0.3528 | 0.9688 | 1.0 | 0.3528 | 2.2165 | 2.6500 | 0.3528 | 2.7762 | 3.6256 |
| 0.7 | 0.1412 | 0.9566 | 1.0 | 0.1412 | 3.1321 | 4.3849 | 0.1412 | 4.5514 | 8.6142 |

Табл. 4.6. Ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}_{22}^*$

| $c$ | $\tilde{\mu}_1 = 1$ | | | $\tilde{\mu}_1 = 10$ | | | $\tilde{\mu}_1 = 1000$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\tilde{h}_1 = 0$ | $\tilde{h}_1 = 10$ | $\tilde{h}_1 = \infty$ | $\tilde{h}_1 = 0$ | $\tilde{h}_1 = 10$ | $\tilde{h}_1 = \infty$ | $\tilde{h}_1 = 0$ | $\tilde{h}_1 = 10$ | $\tilde{h}_1 = \infty$ |
| 0.1 | 0.7366 | 0.9687 | 1.0 | 0.7366 | 1.0692 | 1.1368 | 0.7366 | 1.0859 | 1.1611 |
| 0.3 | 0.4621 | 0.9108 | 1.0 | 0.4621 | 1.2413 | 1.5533 | 0.4621 | 1.3114 | 1.6962 |
| 0.5 | 0.2747 | 0.8567 | 1.0 | 0.2747 | 1.4622 | 2.2866 | 0.2747 | 1.6227 | 2.8276 |
| 0.7 | 0.1149 | 0.8048 | 1.0 | 0.1149 | 1.7433 | 3.8503 | 0.1149 | 2.0574 | 7.0149 |

добре узгоджуються з відомими літературними даними.

Проведено також чисельний аналіз пружних властивостей композита з властивими наноматеріалам недосконалими границями розділу фаз другого типу ($\tilde{h}_2 \neq 0$) з використанням періодичної та квазівипадкової структурних моделей. Одержані дані свідчать, що поверхневі напруження суттєво впливають на макроскопічну жорсткість наноструктурованих матеріалів, зокрема збільшують ефективну пружність нанопористого тіла.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі вперше в строгій постановці розв’язано задачі визначення напруженого стану та макроскопічних пружних властивостей кусково-однорідних тіл з неідеальними еліптичними границями розділу за антиплоского зсуву.

Основні результати роботи полягають у тому, що:

1. Розвинуто ефективний аналітичний метод розв`язання крайових задач теорії пружності в багатозв`язних областях з еліптичними границями, який базується на принципі суперпозиції, методі комплексних потенціалів та формулах перерозкладу еліптичних гармонік при ортогональному перетворенні координат;

2. В строгій постановці розв`язано задачі про напружено-деформований стан кусково-однорідних тіл зі скінченою множиною та періодичною системою включень еліптичної форми за неідеального механічного контакту на границях розділу. При цьому:

- формулюванням крайових задач в термінах комплексних потенціалів забезпечено уніфікований вигляд розв’язку для неідеальних умов пружного контакту першого і другого типу;

- в результаті точного виконання контактних умов кожну з розглянутих крайових задач зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розвинення виразу для переміщень в ряд Лорана;

- проведено повне математичне обґрунтування методу, зокрема досліджено асимптотичні властивості коефіцієнтів алгебраїчних систем та доведено можливість їх розв'язання методом редукції;

3. Схеми Максвела і Релея визначення ефективних пружних сталих сформульовано в термінах індукованих дипольних моментів еліптичних включень та запропоновано їх узагальнення на випадок багаточасткових моделей, що дає можливість врахування реальної мікроструктури структурно-неоднорідного тіла, одержано точний вираз для ефективних модулів поздовжнього зсуву.

4. Здійснено програмну реалізацію методу, проведено чисельний аналіз впливу параметрів структури та умов контакту на границях розділу на концентрацію напружень та ефективні пружні модулі кусково-однорідних тіл.

5. Одержано значний об'єм розрахункових даних та встановлено, що

- в зонах між включеннями має місце значна концентрація напружень, яка залежить від відстані між включеннями, їх форми, властивостей, взаємної орієнтації та способу навантаження;

- недосконалість контакту між матрицею та включеннями обумовлює залежність напруженого стану і макроскопічних пружних властивостей кусково-однорідного тіла від розміру включень, зокрема на нанорівні;

- врахування поверхневих напружень усуває сингулярність поля напружень в вершині нескінченно тонкої еліптичної пори;

- ефективні пружні властивості кусково-однорідних тіл є структурно-чутливими параметрами, для періодичних та частково орієнтованих структур має місце анізотропія ефективних властивостей;

- макроскопічна пружність композита при $\widetilde{h}_1 \geq 100$ близька до такої за умови ідеального контакту фаз, для $\widetilde{h}_1 < 0.1$ близька до пружності пористого тіла.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kushch, V. I., Chernobai, V. S.: Transverse conductivity and longitudinal shear of elliptic fiber composite with imperfect interface. International Journal of Solids and Structures. (51), 2529-2538 (2014)
2. Kushch, V. I., Sevostianov, I., Chernobai V. S.: Effective conductivity of composite with imperfect contact between elliptic fibers and matrix: Maxwell's homogenization scheme. International Journal of Engineering Science. (83), 146-161 (2014)
3. Kushch, V. I., Mishuris, G. S., Chernobai V. S.: Longitudinal shear of a composite with elliptic nanofibers:local stresses and effective stiffness. International Journal of Engineering Science. (84), 79-94 (2014)
4. Чернобай, В.С., Кущ, В.І.: Антиплоский зсув пружного тіла з еліптичними включеннями за неідеального контакту на поверхнях поділу. Математичні методи та фізико-механічні поля. **59** (4), 72-81 (2016)

5. Чернобай, В.С.: Концентрація напружень на еліптичній нанопорі за антиплоского зсуву. Вісник Київського Національного університету ім. Т.Г. Шевченка, серія “Математика. Механіка”. **2** (38), 48-53 (2017)
6. Кущ, В.І., Майстренко, А.Л., Чернобай, В.С.: Модифікований метод Максвела визначення ефективних сталих структурно-неоднорідних матеріалів. Доповіді НАНУ, серія “Матеріалознавство”. (2), 35-41 (2017)
7. Чернобай, В.С.: Антиплоский зсув пружного тіла, ослабленого системою нанорозмірних еліптичних пор чи тріщин. В: Збірник наукових праць 5-ї Міжнародної конференції "Механіка руйнування матеріалів та міцність конструкцій", Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів, 431-436 (2014) доповідь
8. Чернобай, В.С.: Залежність теплопровідності алмазовмісних композитів від контактного опору міжфазної границі «алмаз-металева звязка». В: Тези доповідей Восьмої конференції молодих вчених «Надтверді композиційні матеріали та покриття: отримання, властивості та застосування», Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України, Київ (2014)доповідь
9. Chernobai, V.S., Bieliaiev, A.I.: Modeling the thermal conductivity of diamond composites. В: Тези Міжнародної конференції PRO-TECH-MA, Bezmiechowa, Poland (2016) заочна

10. Чернобай, В.С.:Модифікований метод Максвела визначення ефективної провідності композитів з урахуванням мікроструктури. В: Тези доповідей Дев’ятої конференції молодих вчених та спеціалістів, Інститут надтвердих матеріалів ім. В. М. Бакуля НАН України, Київ (2016) доповідь

11. Чернобай, В.С.: Антиплоский зсув пружного тіла з еліптичними включеннями при неідеальному контакті фаз. В: Abstracts of conference reports XVIII International Conference "Dynamical System Modeling and Stability Investigations" (DSMSI-2017), Київ (2017) доповідь
12. Чернобай, В.С. Модифікований метод Максвела визначення ефективної теплопровідності композитних волокнистих матеріалів. В: Матеріали конференції КМН–2017, Львів (2017) доповідь

## АНОТАЦІЯ

*Чернобай В.С.* Напружений стан та ефективні пружні властивості кусково-однорідних тіл з недосконалими еліптичними границями розділу за антиплоского зсуву. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла». - Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України, 2018.

Дисертацію присвячено дослідженню напружено-деформованого стану та визначенню ефективних пружних модулів кусково-однорідного тіла з неідеальними еліптичними границями розділу за антиплоского зсуву. Розв’язано задачі про антиплоский зсув пружного тіла зі скінченною множиною та періодичною системою довільно розташованих еліптичних включень у припущенні неідеального

механічного контакту на поверхнях поділу фаз. Аналітичний розв'язок одержано методом рядів з використанням техніки комплексних потенціалів. Шляхом розвинення зумовлених включеннями збурень поля переміщень у ряд Лорана за системою еліптичних гармонік, використання формул їхнього перерозкладу і повного виконання контактних умов крайову задачу теорії пружності зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Доведено застосовність до вказаної системи методу редукції, досліджено швидкість збіжності розв'язку. Модифіковані методи Максвела і Релея визначення ефективних сталих сформульовано в термінах індукованих дипольних моментів еліптичних включень. Виконано чисельний аналіз розглянутих задач та проведено порівняння з відомими літературними даними. Встановлено суттєву залежність концентрації напружень та ефективних пружних модулів від умов контакту на границях розділу, а також від форми, розміру, взаємного розташування і орієнтації включень.

**Ключові слова:** кусково-однорідне тіло, еліптичне включення, пружність, недосконала границя, комплексний потенціал, дипольний момент, ефективні пружні властивості, модифікований метод Максвела.

## АННОТАЦИЯ

*Чернобай В.С.* Напряженное состояние и эффективные упругие свойства кусочно-однородных тел с несовершенными эллиптическими границами раздела при антиплоском сдвиге. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела» - Институт механики им. С.П. Тимошенка НАН Украины, 2018.

Диссертация посвящена исследованию напряженно-деформированого состояния и определению эффективных упругих модулей кусочно-однородного тела с неидеальными эллиптическими границами раздела при антиплоском сдвиге. Решены задачи о антиплоском сдвиге упругого тела с конечным множеством и периодической системой произвольно расположенных эллиптических включений в предположении неидеального механического контакта на поверхностях раздела фаз. Аналитическое решение получено методом рядов с использованием техники комплексных потенциалов. Путем разложения обусловленных включениями возмущений поля перемещений в ряд Лорана по системе эллиптических гармоник, использования формул их переразложения и полного выполнения контактных условий краевую задачу теории упругости сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказано применимость к указанной системе метода редукции, исследовано скорость сходимости решения. Модифицированные методы Максвелла и Рэлея определения эффективных постоянных сформулировано в терминах индуцированных дипольных моментов эллиптических включений. Выполнен численный анализ рассмотренных задач и проведено сравнение с известными литературными данными. Установлена существенная зависимость концентрации напряжений и эффективных упругих модулей от условий контакта на

границах раздела, а также от формы, размера, взаимного расположения и ориентации включений.

**Ключевые слова:** кусочно-однородное тело, эллиптические включения, упругость, несовершенная граница, комплексный потенциал, дипольный момент, эффективные упругие свойства, модифицированный метод Максвелла.

## SUMMARY

*Chernobai V.S.* The stress field and effective elastic properties of a piecewise homogeneous solids with imperfect elliptic interfaces at anti-plane shear. - Manuscript.

Thesis for a candidate degree in physical and mathematical sciences, specialty 01.02.04 "Mechanics of deformable solid". – S.P. Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine, 2018.

This thesis is devoted to the investigation of the stress fields and the determination of effective elastic moduli of a piecewise homogeneous solids with imperfect elliptic interfaces in case of anti-plane shear. The problem of the anti-plane shear of an elastic solid with a finite set and a periodic system of arbitrary elliptic inclusions is solved in the assumption of imperfect mechanical contact on the interfaces. An analytical solution was obtained by the method of series using the technique of complex potentials. By expanding disturbances of the displacements field caused by the inclusions into Laurent series in the system of elliptic harmonics, using the formulas for their re-expansion, and complete fulfillment of the contact conditions, the boundary-value problem of the theory of elasticity is reduced to an infinite system of linear algebraic equations. Applicability of the reduction method to this systemhave been proven and the convergence rate of the solution is investigated. The modified Maxwell and Rayleigh methods for determining effective constants are formulated in terms of the induced dipole moments of elliptic inclusions. Numerical analysis of the problems has been carried out and a comparison has been made with the literature data. The interface conditions as well as the shape, size, relative location and orientation of the inclusions are found to have a profund effect on the stress concentration and effective elastic moduli.

**Key words:** piecewise homogeneous solid, elliptic inclusions, elasticity, imperfect interface, complex potential, dipole moment, effective elastic properties, modified Maxwell method.